221

Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

Soit $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $n,N\in\mathbb{N}^*$, $\Omega\subseteq\mathbb{R}\times(\mathbb{K}^N)^n$ ouvert, $f:\Omega\to\mathbb{K}^N$.

I] Solutions d'équations différentielles linéaires

1] Existence et unicité des solutions

[I.2]

Définition 1 : On appelle équation différentielle d'ordre n dans $\mathbb{K}^N$ toute équation de la forme : $\forall(t,y;\dots;y^{(n-1)})\in\Omega$,
$$y^{(n)}=f(t;y;\dots;y^{(n-1)})$$

Remarque 2 : Si $N=1$, alors on parle d'équation différentielle scalaire. Sinon, on parle d'équation différentielle vectorielle.

[I.5] [Ber]

Définition 3 : Une solution d'une telle équation différentielle est : $(I;y)$ avec $I\subseteq\mathbb{R}$ intervalle et $y:I\to\mathbb{K}^N$ telle que $\forall t\in I$, $(t;y(t);\dots;y^{(n-1)}(t))\in\Omega$ et $y^{(n)}(t)=f(t;y(t);\dots;y^{(n-1)}(t))$

Proposition 4 : En considérant $Y=\begin{pmatrix}y_0\\ \vdots\\ y_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\ \vdots\\ y^{(n-1)}\end{pmatrix}$, l'équation différentielle est équivalente à l'équation différentielle d'ordre 1 dans $\mathbb{K}^{nN}$: $Y'=F(t;Y)$ avec $F(t;Y)=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_{n-1}\\ f(t;Y)\end{pmatrix}$

Exemple 5 : Pour $y''=y$, on pose $Y=\begin{pmatrix}y\\ y'\end{pmatrix}$ d'où : $Y'=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}Y$.

[I.2]

Définition 6 : On dit que l'équation $y'=f(t;y)$ est une équation différentielle linéaire si : $f(t;y)=A(t)y+B(t)$ avec $A:I\to\mathcal{M}_N(\mathbb{K})$ et $B:I\to\mathbb{K}^N$.
Si $B=0$, alors on parle d'équation différentielle linéaire homogène.

[II.2]

Théorème 7 : (de Cauchy-Lipschitz linéaire) Soit $I\subseteq\mathbb{R}$ intervalle, $A\in\mathcal{C}(I;\mathcal{M}_N(\mathbb{K}))$, $B\in\mathcal{C}(I;\mathbb{K}^N)$, $(t_0;y_0)\in I\times\mathbb{K}^N$.
Alors : $\exists!\, y:I\to\mathbb{K}^N$ solution de $y'=Ay+B$ avec $y(t_0)=y_0$.

2] Structure de l'ensemble des solutions

Soit $I\subseteq\mathbb{R}$ intervalle, $A\in\mathcal{C}(I;\mathcal{M}_N(\mathbb{K}))$, $B\in\mathcal{C}(I;\mathbb{K}^N)$. On note $(\mathcal{L})$: $\forall(t,y)\in I\times\mathbb{K}^N$, $y'=A(t)y+B(t)$; $(\mathcal{L}_H)$ $\forall(t;y)\in I\times\mathbb{K}^N$, $y'=A(t)y$ et $S;S_H$ leurs ensembles de solutions respectifs maximales.

[II.3]

Proposition 8 : (1) S_H est un sous-ev de $\mathcal{C}(I;\mathbb{K}^N)$
(2) $\forall t_0\in I$, $\Phi_{t_0}:\begin{array}{l}S_H\to\mathbb{K}^N\\ y\mapsto y(t_0)\end{array}$ est un isomorphisme d'ev
(3) S est un $\mathbb{K}$-espace affine de direction S_H.

Exemple 9 : Pour $y''-2y'+y=0$, $y_0(t)=e^t$ et $y_1(t)=te^t$ sont des solutions indépendantes. Comme l'ensemble des solutions est un ev de dimension 2, les solutions sont de la forme :
$y(t)=ae^t+bte^t$ avec $a,b\in\mathbb{R}$.

[II.4] [Ber]

Définition 10 : Un système fondamental de solutions de $(\mathcal{L}_H)$ est une famille $(y_1;\dots;y_N)$ de solutions indépendantes.
La matrice $\Phi(t)=(y_1(t)|\dots|y_N(t))$ est appelée matrice fondamentale de $(\mathcal{L}_H)$.
Le wronskien de ce système fondamental est :
$W(y_1;\dots;y_N):\begin{array}{l}I\to\mathbb{K}\\ t\mapsto\det(\Phi(t))\end{array}$

Exemple 11 : Pour l'exemple 9, sa matrice fondamentale est :
$\Phi(t)=\begin{pmatrix}y_0(t)&y_1(t)\\ y_0'(t)&y_1'(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^t&te^t\\ e^t&(t+1)e^t\end{pmatrix}$ de wronskien e^{2t}.

Proposition 12 : La solution de $(\mathcal{L}_H)$ telle que $y(t_0)=y_0$ s'écrit :
$\forall t\in I$, $y(t)=\Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}y_0$

Proposition 13 : $(y_1;\dots;y_N)$ forme une base de solutions de $(\mathcal{L}_H)$ ssi $\exists t_0\in I\mid W(y_1;\dots;y_N)(t_0)\neq0$

3] Théorème de sortie de tout compact

[III.8] [Ber]

Théorème 14 : (de sortie de tout compact) Soit $f:\Omega\to\mathbb{K}^N$ continue, localement lipschitzienne en y, soit $y:]c;d[\to\mathbb{K}^N$ solution maximale de $y'=f(t;y)$.
Alors : $\forall K\subseteq\Omega$ compact, $\exists V\in\mathcal{V}_d\mid\forall t\in V$, $(t;y(t))\notin K$

Exemple 15 : $y(t)=\dfrac{1}{1-t}$ est solution de $y'=y^2$ et $(t;y(t))$ sort bien de tout compact dès lorsque $t\to1$.

[ZQ]

Application 16 : (théorème d'Hadamard-Lévy) Soit $f\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$
Alors : f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme global sur $\mathbb{R}^n$ ssi f est propre et $\forall x\in\mathbb{R}^n$, $d_xf\in GL(\mathbb{R}^n)$.

II] Résolution d'équations différentielles linéaires

1] Recherche d'une base de solution homogène

[II.4]

Proposition 17: Pour $N=1$, soit $a,b : I \to \mathbb{K}$ continues, $(t_0;y_0) \in I \times \mathbb{K}$

Alors: La solution globale de $y' = a(t)y + b(t)$ avec $y(t_0)=y_0$ est:

$$y(t) = y_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} + \int_{t_0}^{t} b(s) e^{\int_s^t a(\sigma)d\sigma} ds$$

[Ber]

Proposition 18: Pour $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ constante, diagonalisable de vp $(\lambda_k)_{k=1}^N$ et de $\vec{vp}$ $(v_k)_{k=1}^N$

Alors: une base de l'ev des solutions de $(\mathcal{L}_H)$ est: $(t \mapsto e^{\lambda_k t} v_k)_{k=1}^N$

Exemple 19: Une base des solutions de $\begin{cases} x' = x+y \\ y' = 2y \end{cases}$ est:

$$\left(t \mapsto e^{t}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} ; t \mapsto e^{2t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)$$

[II.7]

Définition 20: $\underbrace{\text{Soit}}_{\text{Pour } N=1}$ $(\mathcal{L}_{n,H}) : a_n y^{(n)} + \dots + a_0 y = 0$ avec $a_0;\dots;a_n \in \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^*$.

Le polynôme caractéristique associé à $(\mathcal{L}_{n,H})$ est:

$$P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$$

Théorème 21: Soit $r_1;\dots;r_p$ solutions de $P(X)=0$ de multiplicités $m_1;\dots;m_p$, avec P le polynôme caractéristique de $(\mathcal{L}_{n,H})$.

Alors: les solutions de $(\mathcal{L}_{n,H})$ sont:

$$y(t) = (\lambda_{1,1}t^{m_1-1} + \dots + \lambda_{1,m_1-1}t + \lambda_{1,m_1})e^{r_1 t} + \dots + (\lambda_{p,1}t^{m_p-1} + \dots + \lambda_{p,m_p-1}t + \lambda_{p,m_p})e^{r_p t}$$

ie une base de solutions de $(\mathcal{L}_{n,H})$ est: $(t \mapsto t^l e^{r_k t})_{1 \le k \le p,\ 0 \le l \le m_k - 1}$

Exemple 22: Soit $(\mathcal{L}_{2,H}) : y'' + a_1 y' + a_0 = 0$.

Alors: (1) Si P a deux racines réelles $r_1 \neq r_2$, alors: $y(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$

(2) Si P a une racine double r_1, alors $y(t) = (\lambda t + \mu)e^{r_1 t}$

(3) Si P a deux racines complexes $r_1 = \rho + i\sigma$; $r_2 = \rho - i\sigma$, alors:

$$y(t) = e^{\rho t}[\alpha \cos(\sigma t) + \beta \sin(\sigma t)]$$

2] Recherche d'une solution particulière

[Ber] [II.6]

Remarque 23: La méthode de variation de la constante consiste à chercher les solutions de $(\mathcal{L})$ sous la forme $y(t) = \Phi(t)C(t)$ avec $C(t)$ un vecteur colonne "à faire varier": $\Phi(t)C'(t) = B(t)$

d'où: $C'(t) = \Phi(t)^{-1}B(t)$ et alors: $C(t) = C(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1}B(s)ds$.

[II.6 [Ber]]

Proposition 24: (Formule de Duhamel) Soit $(t_0;y_0) \in I \times \mathbb{K}^N$.

Alors: la solution de $(\mathcal{L})$ telle que $y(t_0)=y_0$ est donnée par:

$$y(t) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}y_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t)\Phi(s)^{-1}B(s)ds$$

Exemple 25: La solution de $y'' - 2y' + y = e^t$ avec $y(-1)=0$ et $y'(-1)=1$ est: $y(t) = \left(\frac{t^2}{2} + t(e+1) + e + \frac{1}{2}\right)e^t$

III] Étude qualitative de la stabilité

1] Solutions stables

[VI.1 [Ber]]

Définition 26: Soit $(t_0;y_0) \in I \times \Omega'$, $y_{t_0;y_0}$ solution de $y' = f(t;y)$.

On dit que $y_{t_0;y_0}$ est stable (à droite) si:

(i) $\exists \alpha > 0 \mid \forall y_1 \in \Omega', \|y_1 - y_0\| \le \alpha \Rightarrow \forall t \ge t_0, y_{t_0;y_1}(t)$ est bien définie

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta \in]0;\alpha] \mid \forall y_1 \in \Omega', \|y_1 - y_0\| \le \eta \Rightarrow \forall t \ge t_0, \|y_{t_0;y_1}(t) - y_{t_0;y_0}(t)\| \le \varepsilon$

On dit que $y_{t_0;y_0}$ est asymptotiquement stable si:

(i) $y_{t_0;y_0}$ est stable

(ii) $\exists \delta > 0 \mid \forall y_1 \in \Omega', \|y_0 - y_1\| \le \delta \Rightarrow y_{t_0;y_0}(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} y_{t_0;y_1}(t)$

Remarque 27: La notion de stabilité se traduit par: de petites perturbations de la donnée initiale conduisent à de faibles variations des solutions. La stabilité asymptotique demande en plus que la solution perturbée tende vers la solution de départ lorsque $t \to +\infty$.

Exemple 28: Les solutions de $y' = y$: $y_{t_0;y_0}(t) = y_0 e^{t - t_0}$ sont asymptotiquement stables à gauche mais pas à droite.

[VI.2]

Théorème 29: Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ de vp : (λ_j)

Alors: les solutions de $y' = Ay$ sont:

(1) stables ssi $\forall j$, $Re(\lambda_j) < 0$ ou ($Re(\lambda_j) = 0$ et le bloc de Jordan correspondant est diagonalisable)

(2) asymptotiquement stables ssi $\forall j$, $Re(\lambda_j) < 0$

[Isen]

Lemme 30: Soit $\|\cdot\|$ norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que toutes ses vp sont de partie réelle < 0.

Alors: $\exists \alpha > 0 \mid \exists \lambda > 0 \mid \forall t \in \mathbb{R}_+, \|e^{tA}\| \le \lambda e^{-\alpha t}$

[Isou]

Théorème 31 : (de Liapounov) Soit $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ telle que $f(0)=0$ et d_0f de vp de partie réelle <0.
Alors : 0 est point d'équilibre stable du système $\begin{cases} y'=f(y)\\ y(0)=y_0\end{cases}$

Exemple 32 : 0 est point d'équilibre asymptotiquement stable de $y''+C\sin(y)=0$ avec $C>0$.

IV] Équations différentielles dans les espaces de Hölder

1] Espaces de Hölder

VIII.III.1 [ZQ]

Remarque 33 : Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\mathcal{C}^{k+1}\subseteq\mathcal{C}^k\subseteq\mathcal{C}^{k-1}$ mais une suite bornée de $\mathcal{C}^k$ n'a pas forcément sa limite dans $\mathcal{C}^k$.

Définition 34 : Soit $\Omega\subseteq\mathbb{R}$ ouvert, $\alpha\in]0;1]$. On définit :
$$\mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega)=\{f\in L^\infty(\Omega)\mid \exists C>0\mid\forall x,y\in\Omega,\ |f(x)-f(y)|\le C|x-y|^\alpha\}$$
$$\|f\|_\alpha=\|f\|_\infty+\sup_{x\neq y}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}$$

Exemple 35 : $f: \begin{array}{l}]-1;1[\to\mathbb{R}\\ x\mapsto |x|^\alpha\end{array} \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(]-1;1[)$

Remarque 36 : (1) $\forall\alpha\in]0;1]$, $\mathcal{C}^1_b(\Omega)\subseteq\mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega)\subseteq\mathcal{C}^0_b(\Omega)$
(2) Les fonctions de $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega)$ sont uniformément continues

Proposition 37 : (1) $\forall\alpha\ge\alpha'$, $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega)\subseteq\mathcal{C}^{0,\alpha'}(\Omega)$ et l'inclusion est continue.
(2) Si Ω est ouvert, borné, $\alpha>\alpha'$, alors l'inclusion $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega)\subseteq\mathcal{C}^{0,\alpha'}(\Omega)$ est compacte (l'image d'une boule est relativement compacte)

Définition 38 : Soit $\Omega\subseteq\mathbb{R}$ ouvert, $k\in\mathbb{N}$, $\alpha\in]0;1]$. On définit :
$$\mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega)=\{f\in\mathcal{C}^k_b(\Omega)\mid\forall\beta\le k,\ f^{(\beta)}\in\mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega)\}$$ et :
$$\|f\|_{k,\alpha}=\sum_{\beta\le k}\|f^{(\beta)}\|_\alpha \quad\text{et}\quad \|f\|'_{k,\alpha}=\sum_{\beta<k}\|f^{(\beta)}\|_\infty+\|f^{(k)}\|_\alpha$$

VIII.III.1 [ZQ]

Théorème 39 : (1) Soit $k+\alpha>k'+\alpha'$, alors $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega)\subseteq\mathcal{C}^{k',\alpha'}(\Omega)$ et l'inclusion est continue.
(2) Si Ω ouvert, borné, alors l'injection $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega)\hookrightarrow\mathcal{C}^{k',\alpha'}(\Omega)$ est compacte.
(3) Si Ω ouvert, borné, alors $\forall\varepsilon>0\mid\exists C_\varepsilon>0\mid\|f\|'_{k,\alpha}\le\varepsilon\|f\|_{k,\alpha}+C_\varepsilon\|f\|_\infty$
(4) $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega)$ est une algèbre multiplicative i.e. si $u,v\in\mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega)$, alors $uv\in\mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega)$ et $\|uv\|_{k,\alpha}\le C\|u\|_{k,\alpha}\|v\|_{k,\alpha}$

2] Application à la résolution d'EDO linéaires

III.VIII [ZQ]

Théorème 40 : (principe du maximum faible) (admis) Soit $]a;b[\subseteq\mathbb{R}$, $L=A\dfrac{d^2}{dx^2}+B\dfrac{d}{dx}+C$ avec $A,B,C:]a;b[\to\mathbb{R}$ bornés tels que : $\forall x\in]a;b[$, $A(x)>0$ et $C(x)\le0$. Soit $u\in\mathcal{C}([a;b])\cap\mathcal{C}^2(]a;b[)$ tel que $L(u)\ge0$.
Alors : $\sup_{x\in]a;b[}u(x)\le\sup_{x\in\{a;b\}}\{\sup\{u(x);0\}\}$

Théorème 41 : Soit $\alpha\in]0;1]$, $a,b\in\mathbb{R}$, $q\in\mathcal{C}^{0,\alpha}(]a;b[)$ avec $q\ge0$.
Alors : $\forall f\in\mathcal{C}^{0,\alpha}(]a;b[)$, $(E):\begin{cases}-u''+qu=f \text{ sur }]a;b[\\ u(a)=u(b)=0\end{cases}$ admet une unique solution $u\in\mathcal{C}^{2,\alpha}(]a;b[)$.

Références:

[Ber] Équations différentielles - Berthelin

[ZQ] Analyse pour l'agrégation - Zuily

[Isen] L'oral à l'agrégation de mathématiques - Isenmann